Os temas de Geometria Espacial são extremamente importantes para a compreensão da organização de espaços individuais e coletivos, bem como de elementos da natureza que inspiraram a formalização desta importante área da matemática. Problemas diversos podem ser resolvidos utilizando conceitos e resultados da Geometria e, portanto, passaremos um bom tempo falando sobre prismas, pirâmides e corpos redondos. Nesta quinzena, veremos um pouco sobre poliedros e prismas - objetos que você já conhece do seu dia a dia.

PARALELEPÍPEDO RETO-RETÂNGULO

Um paralelepípedo é um prisma com uma característica especial: as suas bases são paralelogramos!

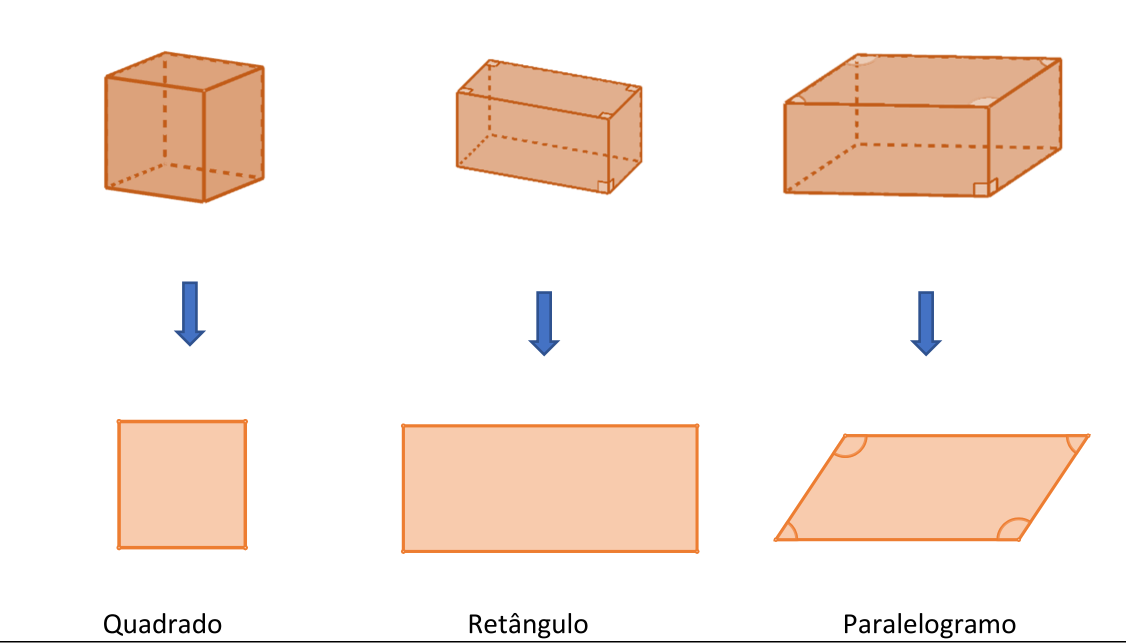


Figura 1 Exemplos de paralelepípedos reto-retângulos

Área total

A área total é a soma das áreas de todas as faces do paralelepípedo. No caso do paralelepípedo reto cuja base é um retângulo e o comprimento, largura e altura são a, b e c respectivamente, a relação da área total é

$$\boldsymbol{A_T = 2ab + 2bc + 2ac},$$

ou seja,

$$\boldsymbol{A_T = 2(ab + bc + ac)}$$

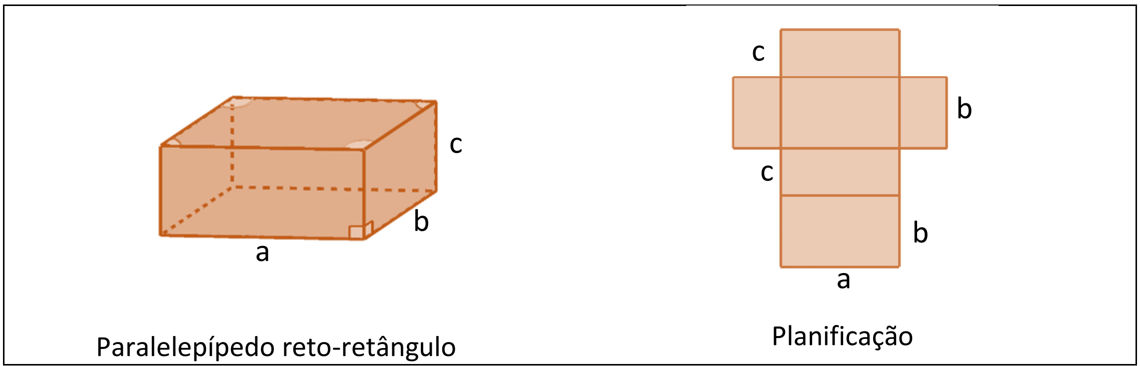


Figura 2 Paralelepípedo reto-retângulo e sua planificação

Exercício Resolvido 1 Marcos deseja embalar seis lembranças que possuem o formato de paralelepípedo com folhas decoradas. O presente possui dimensões 15 cm, 10 cm e 6 cm.

a) Qual é a área total que deve ser revestida com papel presente?
Solução: Um desenho simples da planificação mostra que uma lembrança possui 2 retângulos 15 cm x 10 cm, 2 retângulos 10 cm x 6 cm e 2 retângulos 15 cm x 6 cm. A área total é a soma das áreas dos 6 retângulos que compõem a superfície da lembrança:

$$\mathrm{A_T} = 2\cdot(15\mathrm{cm} \cdot 10\mathrm{cm}) + 2\cdot(10\mathrm{cm} \cdot 6\mathrm{cm}) + 2\cdot(15\mathrm{cm} \cdot 6\mathrm{cm}),$$

ou seja,

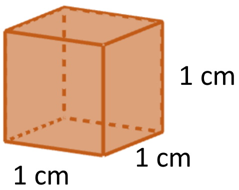
$$\mathrm{A_T} = 2\cdot 150\ \mathrm{cm}^2 + 2\cdot 60\ \mathrm{cm}^2 + 2\cdot 90\ \mathrm{cm}^2 = (300+120+180)\mathrm{cm}^2 = 600\mathrm{cm}^2$$

Como Marcos deseja embalar 6 lembranças, a área total dos presentes é

$$10\cdot 600\ \mathrm{cm}^2 = 6000\ cm^2.$$

Unidade de volume

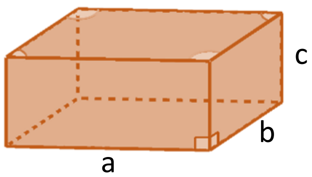
Para realizar a medição de volume (capacidade interna de um sólido, por exemplo), foi determinada a unidade de volume, que é um cubo com arestas medindo 1 unidade cujo volume é definido como 1 cm³. Esta unidade pode ser 1 cm³, 1 dm³, 1 m³ 1 km³ entre outros.



Volume = 1 cm³

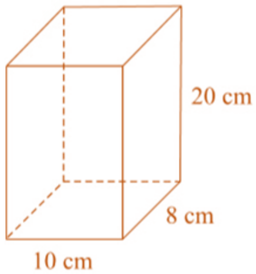
Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

O volume V de um paralelepípedo reto-retângulo é o produto da área da base por sua altura, ou seja, se as dimensões da base são a e b e a altura do sólido é c, então



$$V = a \cdot b \cdot c$$

Exercício Resolvido 2 Certa empresa fabrica xarope de açaí, acondicionado em vasilhames na forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões 8 cm, 10 cm e 20 cm (medidas internas).



Cada vasilhame custa para a empresa R$ 0,30. Qual é o valor gasto com vasilhames pela empresa para armazenar 9600 cm³ do xarope?

Solução: Inicialmente, devemos encontrar a capacidade de volume de um vasilhame. Para isto, calculamos o produto das três dimensões do vasilhame:

$$V = 8\ cm \cdot 10\ cm \cdot 20\ cm = 80\ cm \cdot 20\ cm = 1600\ cm^3$$

Para obter a quantidade de vasilhames necessários para armazenar 9600 cm³ do xarope, dividimos o volume total pelo volume de um vasilhame:

$$\frac{9600cm^3}{1600cm^3} = \frac{9600}{1600} = 6.$$

Portanto, multiplicando o valor de 1 vasilhame por 6, obtemos R$0,30 x 6=R$ 1,80.

Princípio de Cavalieri - Volume de um prisma

A imagem abaixo mostra duas pilhas com a mesma quantidade de moedas empilhadas, mas de maneiras diferentes. Qual é a relação entre o volume da primeira pilha e o volume da segunda pilha?

Figura 3 Moedas e o Princípio de Cavalieri

Você percebe com clareza que o volume da pilha será igual, pois é formada por pilhas de moedas que possuem as mesmas dimensões! Basta somar o volume de cada moeda de cada pilha, e veremos que o volume é o mesmo.

O volume de um prisma qualquer é determinado utilizando o **Princípio de Cavalieri**. Este princípio afirma que, se dois sólidos geométricos estão apoiados em um mesmo plano, e qualquer plano que intercepte os sólidos formam seções de mesma área, então eles possuem o mesmo volume.

Em resumo, para obter o volume de um prisma qualquer, basta obtermos um paralelepípedo reto-retângulo com a mesma área da base do prisma e que possua a mesma altura, pois qualquer plano que intercepte o prisma terá a mesma área de suas bases. Logo, o volume de qualquer prisma é obtido calculando a área de sua base multiplicada por sua altura:

$$V_{Prisma} = A_{Base} \cdot h$$

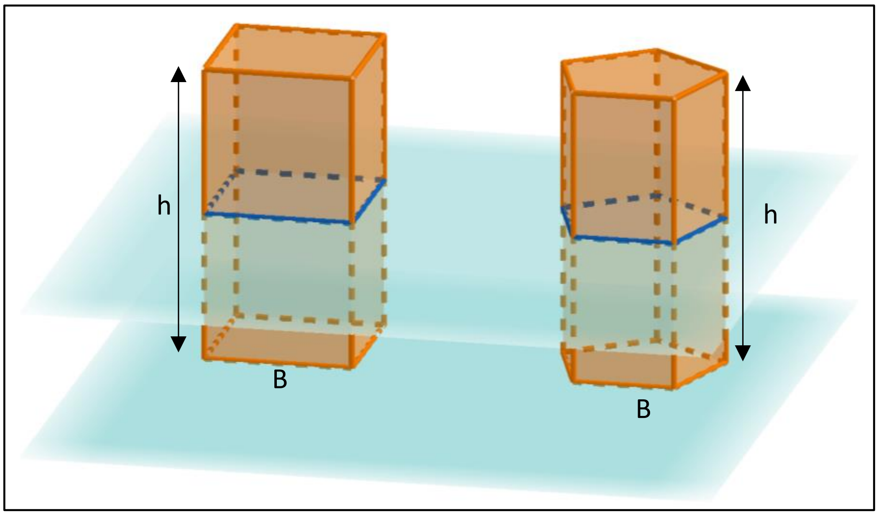
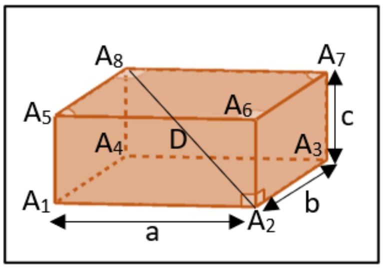


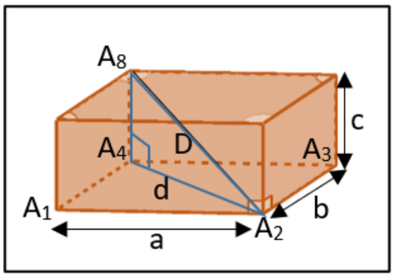
Figura 4 Princípio de Cavalieri

Diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

A diagonal de um paralelepípedo é o segmento que une um vértice de uma base com um vértice não consecutivo localizado na segunda base. Em notação matemática, as diagonais do paralelepípedo reto-retângulo são os segmentos $A_1 A_7$, $A_2 A_8$, $A_3 A_5$ e $A_4 A_6$.

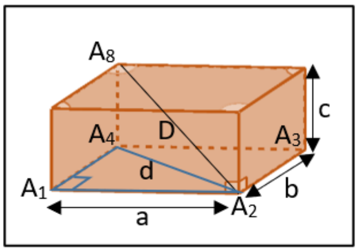


Para encontrarmos a medida da diagonal do paralelepípedo reto-retângulo, vamos considerar o triângulo $A_8 A_4 A_2$. Observe que o triângulo é retângulo, pois o segmento $A_8 A_4$ é perpendicular ao plano da base. Portanto, a diagonal D é a hipotenusa deste triângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $A_8 A_4 A_2$, temos:



$$D^2 = d^2 + c^2.$$

Devemos encontrar o valor da diagonal da base d para finalizarmos a relação da diagonal do prisma D. Para isto, utilizaremos o triângulo retângulo $A_1\,A_2\,A_4$:



Onde temos

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

Substituindo d^2 pela expressão acima, conclui-se que

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,,$$

que é o valor da medida da diagonal do paralelepípedo reto-retângulo.

Exercício Resolvido 3 Calcule a medida, em metros, da diagonal de um bloco retangular de base quadrada cuja altura mede 6 metros e cuja base possui 5 metros de lado.

Solução: A diagonal de um bloco retangular é dada por

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Como a base é um quadrado, podemos considerar $\mathrm{a = b = 5\ m}$ e $\mathrm{c = 6\ m}$. Assim,

$$D = \sqrt{5^2 + 5^2 + 6^2}\,m = \sqrt{25 + 25 + 36}\,m = \sqrt{86}\,m.$$

Agora, vamos conhecer outro tipo de poliedro: a pirâmide.

PIRÂMIDES

Elementos de uma pirâmide

Considere um polígono convexo em um plano qualquer α, e um ponto V do espaço que não esteja contido no plano α. A reunião de segmentos que com um extremo no polígono e outro extremo em V é um poliedro chamado **pirâmide** (ou pirâmide convexa limitada).

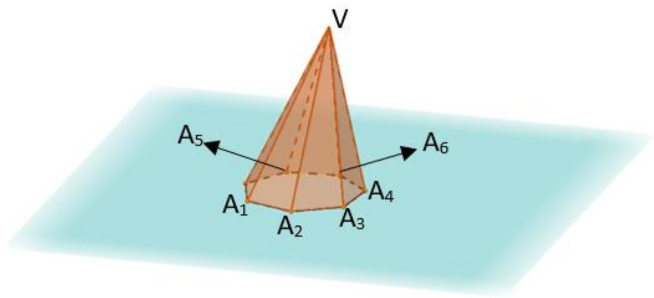
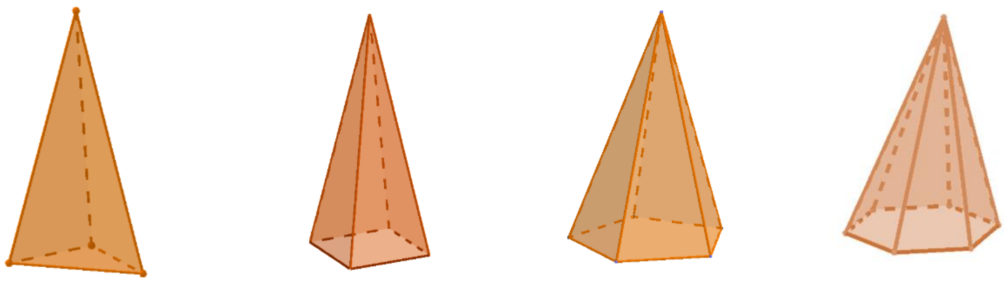


Figura 5 Definição de pirâmide

Nomenclatura

Os tipos de pirâmide variam de acordo com o polígono que forma a sua base. Por exemplo,

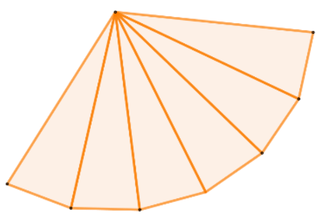


Pirâmide triangular | Pirâmide quadrangular | Pirâmide pentagonal | Pirâmide hexagonal

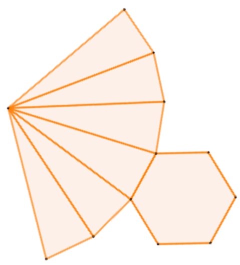
Figura 6 Tipos de pirâmide

Áreas

Assim como os prismas, podemos identificar as regiões lateral e total das pirâmides:



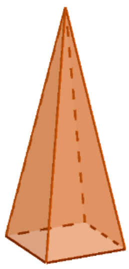
Área lateral



Área total

Pirâmide Regular

Uma pirâmide será regular quando sua base for um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice coincidir com o centro da sua base. Da mesma forma, se a base da pirâmide for um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice coincidir com o centro da sua base, então a pirâmide é regular.



Pirâmide Regular Quadrangular

Apótema de uma pirâmide regular

A apótema da pirâmide regular é o segmento que une o vértice V da pirâmide com o ponto médio de qualquer lado de sua base.

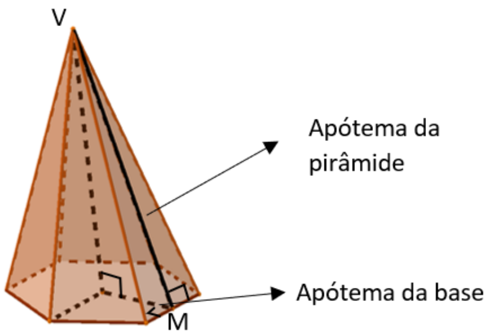
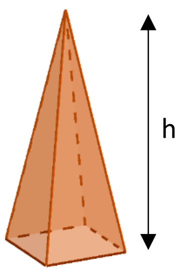


Figura 7 Apótema da pirâmide

Volume da Pirâmide

O volume de uma pirâmide qualquer é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura.



$$V = \frac{1}{3} A_{Base} \cdot h$$

Exercício Resolvido 4 Um monumento no formato de pirâmide será erguido em uma grande praça. Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 2 m e que a altura da pirâmide será de

$\sqrt{7}$ m, qual será o volume de concreto necessário para a construção da pirâmide? Dado: $\sqrt{7} = 2{,}64$.

<u>Solução</u>: Dadas as dimensões da pirâmide, calculamos o seu volume:

$$V = \frac{1}{3}(2m)^2(\sqrt{7}m) = \frac{4\sqrt{7}}{3}m^3 \cong 33{,}52m^3.$$

Portanto, o volume de concreto necessário para a construção da pirâmide é $33{,}52m^3$.

Tronco de pirâmide de bases paralelas

Imagine que uma pirâmide esteja apoiada em um plano α. Em seguida, imagine um outro plano "cortando" a pirâmide acima da base. Como consequência, o corte irá gerar uma nova pirâmide menor, cuja base é semelhante a base da pirâmide original.

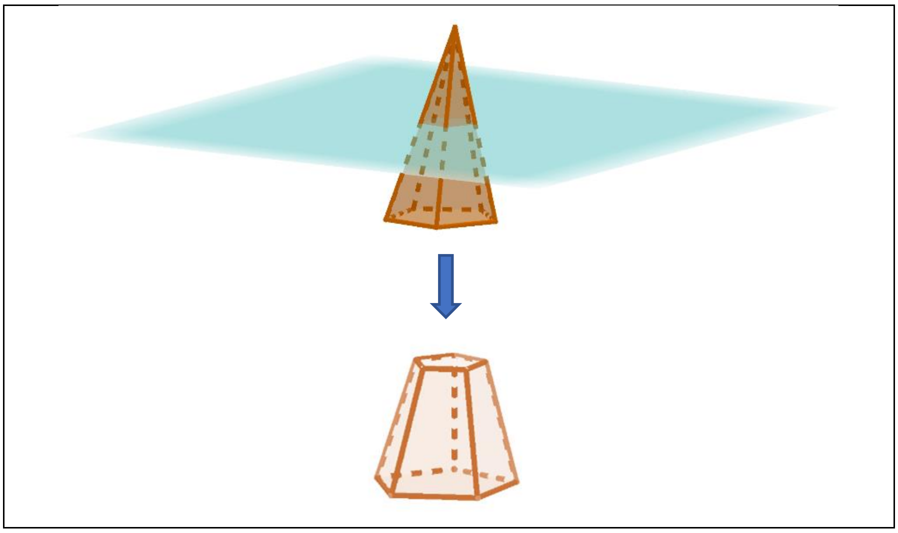


Figura 8 Tronco de pirâmide

O volume do troco de pirâmide é a diferença entre o volume da pirâmide P e o volume da pirâmide P':

$$V_{Tronco} = V_P - V_{P'}$$

Referência Bibliográfica:

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**. 3ª Ed. São Paulo: Moderna, 2015.